

## **I. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

### **Цели и задачи математического образования**

Принятие Правительством Российской Федерации Концепции развития математического образования в стране накладывает особые обязательства на формирование программно-методических документов, относящихся к математическому образованию. Концепция отражает растущую необходимость математической грамотности для всех граждан, математической компетентности для специалистов в самых разных прикладных областях – от создания программных продуктов, высокотехнологичных производств, до медицины. В ней ставится и задача поддержки лидеров, в том числе – подготовки ученых мирового уровня. Другими факторами, диктующими необходимость модернизации математического образования, является принятие Федерального государственного образовательного стандарта (далее – ФГОС), итоговая аттестация за 9-й и 11-й классы, радикальное изменение уровня информатизации и вообще оснащения школы, и все идущие в мире и в России процессы модернизации содержания образования.

В настоящем документе термин «компетентность» используется как уже устоявшийся в современной российской учебно-методической литературе и в образовательном сообществе. Математическая компетентность понимается как совокупность знаний, умений и навыков, относящихся к области математики, и способности их применять. Также используется термин «образованность», как более традиционный и нейтральный. Математическая компетентность формируется и используется в различных школьных предметах: на уроках математики, алгебры, геометрии, физики, информатики, технологии, экономики и др. Внутри самой математической области формирование отдельных элементов компетентности также происходит при изучении различных учебных модулей, традиционно именуемых «предметами», например, умение проводить алгебраические преобразования формируется и при изучении алгебры и при решении геометрических вычислительных задач. Свой вклад вносит и освоение математики

вне школы: в результате изучения популярной литературы, в повседневной практике. Таким образом, формирование математической компетентности является сферой ответственности, «совместного ведения» нескольких учителей одной образовательной организации, авторских коллективов нескольких учебников. Эта ситуация согласуется и с общими тенденциями современного (в частности, российского) образования, относящимися к метапредметным компетентностям, системам учебников и т. д. Поэтому имеет смысл говорить о достигаемой математической компетентности (образованности), а не о результатах «прохождения курса» или «предмета» геометрии или физики.

Предъявляя требования к системе образования, мы фиксируем уровень математической компетентности, которой учащиеся должны обладать в те или иные моменты образовательного процесса. При этом мы исходим из (несколько огрубленной) накопительной, суммирующей (интегрирующей) модели, где считается, что все элементы этой компетентности постоянно суммируются и не теряются в дальнейшем.

Существует потребность в фиксации и описании уровня математической компетентности по завершении каждого класса школы. При этом может потребоваться явное указание на то, что при реализации различных образовательных программ элементы такой компетентности могут достигаться в разные моменты (как правило, в последовательных классах, в сегодняшней российской школе это так).

Описание результатов освоения программы по классам состоит в указании новых элементов компетентности, приобретаемых к завершению очередного класса. При этом предполагается, что сформированные ранее общие умения также применяются для более широкого класса объектов. Например, происходит переход от целых чисел к рациональным, от арифметических выражений к алгебраическим, но по-прежнему используются законы арифметики и т. д.

В соответствии с положениями Закона и Федерального государственного образовательного стандарта основная образовательная программа основного общего образования разрабатывается и реализуется образовательной организацией.

Эта программа в образовательной организации, имеющей государственную аккредитацию, разрабатывается на основе примерной основной образовательной программы основного общего образования. Примерная образовательная программа является вспомогательным документом, задающий возможные, целесообразные, но не обязательные, ориентиры при составлении основной образовательной программы. Распределение аудиторных часов, разбиение тем по предметам, тематическое планирование внутри предметов являются, в первую очередь, вопросом компетенции образовательной организации.

Рабочие программы по предметам, в частности, могут отражать постепенность реализации тех или иных элементов примерной программы. Например, в ближайший год содержание рабочей программы может измениться только в пятом классе. Использование компьютерных инструментов может быть отложено до момента готовности учителей и т. д.

### **Особенности примерной программы**

Настоящая примерная программа будет использоваться при составлении рабочих программ для работы с учащимися, уже завершившими в начальной школе обучение по ФГОС. При этом надо иметь в виду, что и в начальной школе будут продолжаться процессы закрепления ФГОС. В основной школе такие процессы приведут к уточнению и рабочих и примерных программ, существенному, по крайней мере в течение 5-летнего цикла перехода на ФГОС массового и последовательного во всех классах 5–9. Обзор особенностей примерной программы основной школы предваряется в данном документе выделением основных особенностей реализации ФГОС в начальной школе.

### **Преимущество с начальной школой**

Современное содержание курса математики и информатики начального общего образования, отраженное в ФГОС, базируется на фундаментальных понятиях математики и информатики: символа, совокупности («множества», где элементы могут повторяться) и цепочки (конечной последовательности), основных операциях над ними, понятиях логики (истинность, всеобщность, существование) и

алгоритмики (выполнение, построение алгоритма). Все эти понятия осваиваются уже в начальной школе.

Принципиальным для эффективности освоения является то, что осваиваемые объекты, операции, конструкции, действия являются **наглядными**, доступными зрительному восприятию ребенка (на бумаге или на экране), а иногда даже и тактильному, и кинестетическому (когда объекты материализуются), и слуховому.

В частности, понятие числа подкрепляется наглядным образом: графически представленной совокупностью (мешком), площадью фигуры на клетчатой бумаге, процессом пересчета. В представлении числа цепочкой его десятичной записи наглядность количественной сущности числа уже теряется, что оказывается существенным и в основной школе.

Наибольшую трудность требование наглядности вызывает при решении арифметических задач. Независимо от того, выучил учащийся таблицу умножения наизусть или использует висящую на стене, безошибочно ли он выполняет умножение в столбик, остается проблема сопоставления действий над числами с текстовым условием задачи или с реальной ситуацией. Для этого необходима внутренняя модель, формирующаяся в результате использования моделей внешних. Такими внешними моделями могут служить: для натуральных чисел в пределах двадцати – площади заполняемых шаблонов или полосок единичной ширины, в пределах сотни – площади прямоугольников, для больших чисел используются возможности компьютерного «увеличительного стекла», позволяющего увеличивать отдельные участки числовой прямой. Отрицательные числа на диаграммах откладываются «вниз» и т. д. В основной школе формирование «чувства числа» продолжается и относится уже к рациональным и действительным числам.

Еще одной особенностью, присущей математике в начальной школе, отражающаяся и в наглядности, является **дискретность** большинства рассматриваемых объектов. Например, даже в качестве геометрических фигур рассматриваются многоугольниками с целочисленными вершинами, графики изменения представлены столбчатыми диаграммами и т. д.

В начальной школе постоянно решаются задачи построения совокупностей и

цепочек, удовлетворяющих определенной системе условий. Среди этих задач имеются и классические задачи школьной **комбинаторики**. Они формулируются как (выполняемое систематически) построение всех объектов, удовлетворяющих условию, с последующим подсчетом числа получаемых объектов (что соответствует традиционным постановкам: «число сочетаний» и т.д.). Понятие подстановки (одного выражения в другое, вместо какого-то символа, имени), естественно возникает в контексте операций с цепочками и т. д. Оно также оказывается важнейшим в основной школе.

Элементы современной математики, закладываемые в начальной школе, могут в основной школе постоянно развиваться в линии «занимательных», «олимпиадных» задач различного уровня сложности. Освоение современного математического содержания может продолжаться, в отдельном предмете «информатика», например 7–9, или интегрироваться в курс математики. Это содержание включает опыт построения алгоритмов, реализуемых компьютерными программами, и концептуально значимые теоретические определения и результаты.

Естественное и важное требование соотнесения содержания математического образования с окружающей **реальностью** отражается в том, что и в начальной школе и в основной рассматриваются числовые и нечисловые данные, получаемые из внешнего мира. Основным применением математических понятий в начальной школе, наряду с изучением окружающего мира, является русский и иностранный языки, где аппарат цепочек используется постоянно.

Элементы **анализа данных (статистика)** входят в математическое содержание, начиная с начальной школы и во всех классах основной школы.

Одним из важных и относительно новых для российской школы разделов математики является **теория вероятностей**. Важность ее определяется многообразием применений, а также самой по себе «вероятностной картиной мира», формируемой у учащихся и в дальнейшем используемой в широком спектре профессиональных и вообще жизненных ситуаций. Мировоззренческая значимость данного материала, тесная его связь с начальным образованием и аппаратом обыкновенных и десятичных дробей, возможность наглядного

экспериментирования являются аргументами в пользу освоения его уже в 5–6 классах основной школы. В то же время возможно и имеет свои преимущества освоение данного материала в 7–9 классах в связи с изучаемыми в этот период математическими вопросами информатики.

### **Роль геометрии**

Геометрия остается уникальным школьным предметом, в котором могут развиваться способности учащегося к логическому мышлению и точной коммуникации при поддержке визуальной средой. Геометрическое содержание должно проектироваться с учетом:

- развития визуального мышления, пространственного воображения;
- формирования математического словаря, относящегося к общекультурному багажу;
- уникального двухтысячелетнего источника и последующей интеллектуальной традиции, драмы идей, в которую имеет возможность погрузиться учащийся, уникальной красоты геометрических фактов, построений и доказательств;
- обеспечения каждого учащегося максимальным опытом самостоятельного доказывания, решения задач на построение;
- указанной выше задачи обоснования приложений геометрии в физике;
- применения геометрических понятий и фактов в повседневной и профессиональной деятельности;
- полезности решения геометрических задач для развития навыков формульных вычислений, в частности, с повышенными (за счет геометрической интерпретации) возможностями контроля правильности результата.

Основной целью изучения геометрического материала является формирование умений учащегося самостоятельно:

- выдвигать гипотезы о свойствах геометрических конфигураций, в частности, опираясь на чертеж, вводя дополнительные элементы конфигурации;

- доказывать выдвинутые гипотезы, исходя из заданных и уже установленных свойств конфигураций, пользуясь корректными способами рассуждения, изученными теоремами геометрии;
- находить формульные и числовые значения величин в конфигурации, вводя необходимые переменные, используя алгебраические методы, тригонометрические функции;
- создавать алгоритм построения нужной конфигурации циркулем и линейкой и доказывать его правильность.

Основная проблема преподавания геометрии в массовой школе сегодня состоит в том, что в полной мере соответствие перечисленной системе целей не достигается. Фактически происходит несбалансированное сокращение, при котором сохраняется близкий к традиционному объем геометрических понятий и фактов («проходится программа»), но резко сокращенным (иногда до нуля) оказывается объем и сложность выполняемых учащимся заданий по доказыванию и тем более – решению задач на построение, не происходит развития содержательных геометрических представлений, пространственного мышления, геометрической интуиции. Ощущается необходимость в более сбалансированном подходе, при котором, в частности, будут сокращены некоторые содержательные (хотя традиционно и считающиеся важными) геометрические линии с учетом перечисленных выше общих целей. Это также должно найти отражение в рабочих программах.

### **Приближенные вычисления**

Исходя из прикладной значимости математики, в отечественных курсах рассматриваются вопросы приближенных вычислений. Современный подход к предпологает освоение следующих понятий:

- *Оценка.* В случае, когда для имен, входящих в математическое (в частности – алгебраическое) выражение, известны ограничения на их численные значения, иногда бывает возможно сделать вывод об ограничениях на значение всего выражения. Например, если известны интервалы, в которых находятся слагаемые, то можно указать интервал, в

котором заведомо находится сумма.

- *Прикидка.* В некоторых ситуациях, например, чтобы усомниться в правильности вычисления, человек высказывает не заведомо верное, но правдоподобное утверждение о значениях промежуточных результатов вычислений, а потом и о значении всего вычисляемого выражения. При этом могут использоваться и «физические соображения» о возможных значениях величин, имеющих «физический смысл».

- *Приближенное значение.* Простейшим видом оценки является оценка, получаемая отбрасыванием всех знаков десятичной записи числа, начиная с некоторого (приближение с недостатком), или аналогичная операция, дающая «оценку сверху». Приближенные значения десятичных чисел используются и в прикидке, при которой все время ведем «округление», прикидывая значения промежуточных результатов, отбрасывая младшие разряды.

Понятие предела последовательности также возникает в контексте элементарной математики (еще начиная с древнегреческой геометрии). Традиционно оно появляется при суммировании бесконечной геометрической прогрессии, нахождении обыкновенной дроби, равной бесконечной периодической десятичной, и в вопросе о длине окружности и площади круга, как пределах числовых последовательностей. Представляется, что весь указанный материал в основной школе может быть представлен как необязательный для всеобщего освоения и даваться в контексте приближенных вычислений, измерений, экспериментов. В углубленном (предпрофильном) обучении он может рассматриваться как обязательный.

#### **Межпредметные связи, интегративная роль математической образованности**

В сегодняшней российской школе современные разделы математики (прежде всего – относящиеся к дискретным объектам и процессам, компьютерной математике) изучаются в рамках предмета «информатика и ИКТ» (в начальной школе – в рамках интегрированного предмета «математика и информатика»). Такое распределение материала позволило в конце 1980 гг. решить сразу две задачи:

ввести в среднюю школу важнейшие элементы современной математики, прежде всего – алгоритмики, и начать процесс освоения новым поколением современных информационных технологий. Сегодня вторая задача решается во всех школьных предметах и вне школы. Математическое же содержание курса **информатики** доказало свою актуальность, сегодня признанную и в других странах.

Выше было охарактеризовано современное математическое содержание преподавания в начальной школе. Элементы современной математики, закладываемые в начальной школе, могут в основной школе постоянно развиваться в линии «занимательных», «олимпиадных» задач различного уровня сложности. Освоение современного математического содержания может продолжаться, в отдельном предмете «информатика», например 7–9, или интегрироваться в курс математики. Это содержание включает опыт построения алгоритмов, реализуемых компьютерными программами, и концептуально значимые теоретические определения и результаты.

При изучении ряда математических тем естественно и полезно выделять алгоритмическую природу математических фактов и конструкций, а также рассматривать алгоритмы решения возникающих задач и их компьютерную реализацию.

Структуры алгоритмов и данных, традиционно осваиваемые в курсе информатики, определения сложности, как и доказательства невозможности в теории алгоритмов, безусловно относятся к математическому образованию и должны быть представлены в рассматриваемой математической компетентности.

Особенно важной такая связь становится при изучении вопросов анализа данных – **статистики**. Здесь особенно уместным является и применение компьютера для анализа и визуализации данных.

Экономические разделы российского школьного курса обществознания, особенно там, где они выделяются в отдельный предмет – «**экономика**», традиционно включают математические методы решения задач, относящихся к области экономики. Простейшие из них относятся, в основном, к работе с процентами (вроде еще дореволюционных «задач на сложные проценты»). Более

сложные в основном относятся к тому, что можно отнести к задачами оптимизации, часто – к задачам игрового поведения.

Важное место в математической компетентности, формируемой во время обучения в основной школе, занимают элементы, применение (и тем самым – освоение) которых традиционно начинается на уроках **физики**. В современном курсе физики активно используются понятия перпендикулярности, параллельности, вектора (и «откладывания вектора от точки»), операций над векторами (в частности, разложения вектора по двум осям), тригонометрических функций (угла, меньшего развернутого), гармонических колебаний, скорости изменения (производной), ускорения, подобия (в частности – в оптике). Все это необходимо для изучения важнейших разделов физики, осваивается там при решении текстовых задач.

Понятие («мгновенной») скорости изменения какой-то величины (формализуемое, как «производная»), как и понятие накопления (формализуемое, как «интеграл») относятся к общекультурным математическим понятиям. В связи с этим представляется естественным их освоение в общем образовании. Однако современный способ точного введения этих понятия невозможно воспроизвести в массовой школе. Проблему не решает и выучивание формул и упражнения в их применении. Интуитивное понятие скорости формируется в повседневной жизни и в случае постоянной скорости постоянно применяется в курсе математики начиная с начальной школы (в том числе, и в задачах «на работу» и т. д.). Изменения с постоянным ускорением интенсивно изучаются в механике. Рассматривается связь знака производной с возрастанием и убыванием функции. Представляется, что интегрирующим понятием для данной темы может служить понятие касательной к кривой, графику функции. Это понятие, хотя также не может быть введено формально в массовой школе, но вполне значимо содержательно и может быть освоено экспериментально. Оно относится к области математики, но может быть освоено также и в курсе физики. Еще одно содержательное понятие, относящееся к области «математического анализа» — площадь под произвольной кривой. И здесь также имеется ясная интуиция понятия «площадь», которую следует использовать и развивать. При углубленном изучении математики может быть выведена формулы

перемещения при движении с постоянным ускорением.

Относительно простой темой в математике является определение тригонометрических функций для произвольного действительного аргумента. Прохождение этой темы может быть согласовано с прохождением раздела «колебания» в физике. Тогда синусоида приобретает содержательный смысл математического описания широкого круга процессов. Это может быть сделано в основной школе.

Заметим, что использование математических инструментов (компьютера, калькулятора) приветствуется учителями физики, поскольку освобождает время для усвоения физического смысла рассматриваемых процессов. В частности, компьютерные математические инструменты позволяют естественно осваивать в курсах математик и физики и те понятия, о которых речь шла выше, в наглядной, инструментальной форме, без полного теоретического обоснования.

Российский курс математики в своей основе построен как курс решения задач. Задачи занимают существенное место и в курсе физики, как отмечено выше. Российский курс физики предполагает также важную роль эксперимента. Эту роль в последние десятилетия удалось сохранить, несмотря на материальные трудности, которые испытывала школа. Появилась также возможность для виртуальных экспериментов, когда учащийся создает экспериментальную установку на экране компьютера и далее имеет возможность фиксировать ход процесса.

С другой стороны, что не менее ценно, появилась возможность для автоматизированного сбора данных в ходе реального эксперимента, с применением размеченной видеозаписи, виртуального эксперимента, опроса и т. д. Сбор данных, их обработка и визуализация с использованием цифрового оборудования возможны в широком спектре школьных предметов: от биологии до истории, обществознания и литературы. Эти данные должны использоваться при формировании элементов математической компетентности, относящихся к статистике (математическому анализу данных) в курсах математики и информатики. Возможность цифрового измерения и визуализации данных является мощным средством в формировании элементов математической компетентности, относящихся к соответствию между

реальными изменениями и их представлением на графике. В частности, установлена эффективность в таком формировании опыта, приобретаемого учащимся при физическом перемещении собственного тела или какого-то предмета и измерении расстояния до цифрового ультразвукового датчика. Возможным местом «предметной локализации» данного блока содержания может быть курс информатики.

Возможно построение курсов физики и математики, где приложения в физике появляются после прохождения соответствующего материала в курсе математики. При таком построении, например, «векторная» физика начинается только в 9-м классе, а весь геометрический материал, подготовительный к «векторной» геометрии, изучается в математике (геометрии) до «векторной» физики или в некоторых частях, что даже предпочтительнее, параллельно с «векторной» физикой с небольшим опережением. Возможно и более раннее изучение разделов геометрии, обеспечивающее «теоретическую» базу для физики. Это может быть сделано с сохранением основной дедуктивной структуры современного («классического») курса геометрии и наиболее распространенной последовательности тем в физике.

При другом варианте построения курсов математики и физики тот или иной материал вводится в рассмотрение курса математики после того, как он используется в курсе физики. Таким образом, его изучение в курсе математики логически может быть представлено как «теоретическое осмысление», система определений и доказательств для понятий, содержательно, интуитивно, наглядно уже освоенных. В случае понятий математического анализа, однако, целесообразность их строго введения во всех профилях школьного образования представляется сомнительной. Один из обсуждаемых вариантов – оставить понятия математического анализа только в курсе физики.

Выбранный методический подход должен быть отражен в описании элементов математической компетентности по годам обучения. Разумеется, из него вытекает и специфика процесса освоения этого материала, учебной деятельности учащихся, работы учителя, материала учебников математики и физики.

## Обзор содержания математической компетентности и роли учителя различных школьных предметов в ее формировании

Основными элементами математической компетентности, существенными как с точки зрения внутриматематических задач, так и с точки зрения приложений (прежде всего в физике), являются следующие, распределенные по классам, в соответствии с внутренней логикой, предметные, метапредметные и личностные результаты:

- *Начальная школа.* Осваивается логика математических рассуждений, использование имен, утверждений о существовании и всеобщности (через которые выражаются и утверждения типа «и», «или»). Вводятся структуры данных: линейные (цепочки) и иерархические (деревья), используемые в русском и иностранных языках (грамматика, семантика), истории (линия времени), биологии (классификации); натуральные числа, таблицы и столбчатые диаграммы, как один из инструментов представления данных, в том числе о внешнем мире. Осваиваются измерения и анализ данных, в том числе автоматически получаемых цифровыми измерительными приборами, данные визуализируются на компьютере. Осваиваются алгоритмы: в визуальной среде – использующие основные конструкции структурного программирования (без присваивания), в числовой среде – линейные с последовательным присваиванием: «решение арифметических задач по вопросам».

- *5-6 кл.* Изучаются рациональные числа, алгебраические выражения, уравнения, подстановка одного выражения в другое, эквивалентные преобразования. Формируется представление об уравнениях, отражающих закономерности (в частности – физические) реального мира.

- *7 кл.* Появляется двумерная декартова плоскость (пока с рациональными координатами). Формируются представления о функциях, в том числе о функциях, заданных алгебраическими выражениями, и о

функциях, возникающих в результате измерений, проводимых цифровыми датчиками в физических процессах (отчасти возможна замена на ручное измерение) и отражающих их ход. Сопоставляются теоретические и экспериментальные кривые. Физические величины, по существу, одномерны. Начинается изучение геометрии, где воспитывается логическое мышление с опорой на наглядные образы, и алгоритмики с полноценным набором данных и операций для работы с числовыми данными.

- 8 кл. Возникает представление о континууме действительных чисел, как отражающем физическую реальность. Полученные знания о пропорциональности геометрических объектов подкрепляются и используются в геометрической оптике. Аппарат метрической геометрии (теорема Пифагора, расстояние на плоскости, теорема косинусов) и тригонометрии (тригонометрические функции углов меньше развернутого) используется для алгебраического моделирования ситуаций в геометрии и физике. Наличие алгоритма решения квадратных уравнений существенно расширяет класс моделируемых ситуаций, в частности, позволяет изучать движение с постоянным ускорением.

- 9 кл. Элементы векторной алгебры осваивается параллельно в курсе математики и их приложения – в курсе физики. В курсе физики, в динамике, происходит переход от «скалярной» к «векторной»: перемещение, скорость, ускорение, сила становятся векторами (по существу – двумерными). Мир геометрических конфигураций и доказательств существенно обогащается за счет активного использования окружности.

Формирование математической компетентности является целостным процессом. При этом в конкретной образовательной организации должна быть определена ответственность за те или иные компоненты этой компетентности, относящаяся к отдельным учителям, прежде всего к учителям математики, физики и информатики. Наиболее естественным, эффективным и продолжающим в основном

русскую традицию является следующее разделение:

- *Учитель математики:* логика, алгебра, геометрия, тригонометрия, комбинаторика, теория вероятностей, начала анализа.
- *Учитель физики:* реальная математика, операциональное освоение векторов, тригонометрических функций в физических приложениях, содержательное освоение понятий математического анализа, статистика: измерения и сбор данных, визуализация.
- *Учитель информатики:* разделы математики, применяемые в информатике: логика, дискретная математика, включая комбинаторику, алгоритмика, анализ массивов данных.

Учителя информатики и физики также могут обеспечить освоение учащимися инструментов математической деятельности. Желательно при этом, чтобы примеры использования таких инструментов присутствовали и в деятельности, которую организует учитель математики. Освоение других инструментов, например, графических и текстовых редакторов, перестает быть частью предмета «Информатика» и входит в другие школьные дисциплины – те, где соответствующие инструменты используются.

### **Углубленное изучение математики**

Нормативная база современной школы (в частности, ФГОС, БУП) не регламентирует углубленного изучения математики, как и других дисциплин в основной школе. При этом очевидной реальностью русской школы, начиная с середины 1960-ых гг. является существование школ и классов с углубленным изучением математики (то же – для изучения иностранного языка). Углубление (предпрофильная подготовка) достигается за счет сочетания факторов:

- отбор более подготовленных, и, главное – более мотивированных учащихся,
- более высокий уровень преподавания, в частности, более высокая квалификация учителя,
- снижение доли чисто тренировочных, рутинных заданий, повышение доли более творческих, постоянно включающих элемент новизны,
- увеличения урочных часов в учебном плане,

- увеличение общей нагрузки учащихся, относящейся к математике, в том числе приходящейся на самостоятельную работу.

Результатом углубленного изучения математики в основной школе является:

- сохранение и усиление мотивации к дальнейшему математическому образованию и сферам труда, предполагающим профессиональное применение математики и математическую деятельность,
- развитие математических способностей, прежде всего, умения решать новые, необычные задачи, в частности, олимпиадные.

Подчеркнем, что цель освоения дополнительных разделов математики, а особенно – математики последующих классов, или вузовской, не является необходимой в структуре углубленного (предпрофильного) изучения. В то же время, как правило, дополнительно к указанным выше результатам достигается:

- более успешное участие в олимпиадах,
- более надежное, быстрое решение более сложных задач школьного курса, итоговой аттестации.

Дополнительные же разделы математики могут быть весьма разнообразными, существенно не их содержание, а вышеуказанные результаты

Настоящая программа может быть использована и при разработке рабочих программ углубленного изучения математики (а также – программа, ориентированных на углубленную, предпрофильную подготовку в области информатики, физики).

### **Концепция различий в результатах, относящихся к базовому изучению математики и различным профилям**

В настоящем разделе формулируются общие принципы, которые могут быть использованы организацией общего образования при формулировании требований к математической компетентности учащихся, закончивших 9-ый класс по базовой рабочей программе и по различным предпрофильным рабочим программам, которые входят в ООП образовательной организации.

Выпускник **базовой** (массовой) **образовательной программы** после завершения 9-го класса:

- Должен обладать: математической грамотностью
- Мог приобрести: математическую культуру

**Углубленные (предпрофильные) образовательные программы**, реализуемые целыми образовательными организациями или отдельными коллективами педагогов), также выделяют компоненты «должен» и «мог». В обязательный компонент углубленного образования («должен») входят элементы традиционно и инвариантно осваиваемые в основной школе учащимися, ориентированными на дальнейшее математическое образование и применение математики. Кроме этого, варианты углубления (приводится примерный перечень, возможны другие) обладают следующими особенностями:

**Углубленное изучение математики.** Ориентация на получение новых результатов в фундаментальной математике:

- Предметное содержание определяется, прежде всего, задачей формирования мотивации и развития способностей к творческой математической деятельности и обеспечением возможностей для такой деятельности.
- Содержание образования и учебное планирование обеспечивают постоянную поддержку высокой степени новизны, «нестандартности» решаемых задач, основную долю которых составляют задачи доказательства (или опровержения) новых (для учащегося) математических фактов; как правило включаются задачи и методы, характерные для математических олимпиад и кружков; значительное место в содержании занимают геометрические доказательства.
- Основное продолжение образовательной траектории: программы математического профиля в старшей школе и высшем образовании.
- Перспектива профессиональной деятельности: математические исследования в сочетании с преподаванием математики в классических университетах и ведущих инженерных вузах.

- Оснащение: математические редакторы (формул, геометрических чертежей), средства визуализации; предусмотрено знакомство с системами компьютерной алгебры.

**Углубленное изучение математики, физики и технологии.** Ориентация на деятельность в современных отраслях производства, в научных исследованиях, требующих применения математики:

- Предметное содержание определяется, прежде всего, целями формирования мотивации и подготовки к продолжению образования в программах, предполагающих надежное владение студентом всей системой понятий и навыков, относящихся к алгебраическим преобразованиям, решению уравнений и неравенств, к свойствам элементарных функций, их графикам, математическим доказательствам и т. д.
- Содержание образования в курсах математики и физики включает построение моделей физических систем с использованием инструментария непрерывной математики, осваиваемого при поддержке «физической интуиции» и наглядности (визуализации), анализ данных естественно-научного эксперимента, выдвижение и проверку гипотез о математических зависимостях, отработку техники моделирования, получения аналитического результата (решение уравнений и неравенств); геометрия используется для развития математического мышления и навыков построения формульных моделей. Содержание образования в области технологии включает примеры построения и использования математических моделей и их компьютерной реализации для технологических объектов и процессов, в том числе – в системах компьютерного управления, автоматизированного проектирования; одной из задач при этом является формирование мотивации и жизненных перспектив.
- Основное продолжение образовательной траектории: программы физико-математического (или иного, с углублением математики)

профиля в старшей школе, инженерные вузы, естественно-научные факультеты университетов.

- Перспектива профессиональной деятельности: инженерное дело – технологическое проектирование, естественно-научные исследования, преподавание математики, естественно-научных дисциплин в классических университетах и инженерных вузах.
- Оснащение: цифровые лаборатории, системы разметки видеозаписей процессов, технологические лаборатории, системы компьютерной алгебры, геометрии и анализа данных, динамические (электронные таблицы), конструкторы с компьютерным управлением.

**Углубленное изучение математики, информатики и информационных технологий.** Ориентация на деятельность в ИТ-сфере:

- Предметное содержание определяется, прежде всего, целями формирования мотивации и развития способности к деятельности по созданию информационных объектов (программ, схем электронных устройств) к продолжению образования в программах старшей школы и вузов; целью развития алгоритмического мышления.
- Содержание образования в курсах математики и информатики включает создание новых алгоритмов и программ, в том числе программ управления реальными и виртуальными устройствами, с использованием инструментария алгоритмики, дискретной математики, математической логики и теории алгоритмов, математической лингвистики, математической биологии, криптографии, приобретения опыта проектирования, тестирования, отладки программ в современных средах.
- Основное продолжение образовательной траектории: программы информатико-математического (или иного математического, или ИТ) профиля в старшей школе, вузы и факультеты сферы ИТ, компьютерных наук.

- Перспектива профессиональной деятельности: деятельность в сфере проектирования, производства, эксплуатации ИТ, научные исследования и преподавание в сфере информатики и ИТ.
- Оснащение: инструментальные среды для создания программ, в том числе, обеспечивающие визуализацию выполнения программ, системы компьютерной алгебры и геометрии, конструкторы с компьютерным управлением.

### **Углубленное изучение математики и обществознания, экономики.**

Ориентация на деятельность в сфере экономического планирования и управления, финансов, банковского дела,:

- Предметное содержание определяется, прежде всего целями формирования мотивации и развития способности к деятельности в сфере управления экономическими и социальными процессами, приобретения необходимых для этого компетенций, продолжению образования в экономической сфере в программах старшей школы и вузов.
- Содержание образования в курсах математики, информатики и обществознания, экономики включает решение задач оптимизации, построение моделей экономических, социальных, экологических систем, в том числе – игровых, освоение технологий динамических таблиц и их применения в экономической сфере.
- Основное продолжение образовательной траектории: программы углубленного математико-экономического профиля (или иной математический, или обществознание, экономика или ИТ-профиль) в старшей школе, вузы и факультеты социально-экономической сферы.
- Перспектива профессиональной деятельности: деятельность в сфере экономического анализа, прогнозирования и проектирования, банков и финансов, научные исследования и преподавание в сфере экономики.
- Оснащение: инструментальные и моделирующие среды для экономических задач, динамические (электронные) таблицы, системы

компьютерной алгебры и геометрии, комплексные системы, аналогичные 1С.

В ряде предпрофильных направлений углубления (например, в художественном, дизайнерском) требуется углубленная ИКТ-компетентность, и при этом достаточен базовый уровень математической компетентности.

В тексте элементы, относящиеся к углублению по указанным выше направлениям выделены квадратными скобками и буквами после закрывающей скобки [...]М, [...]МФ, [...]МИ, [...]МЭ. В случае включения элемента в содержание или результаты по нескольким вариантам углубления, указываются все варианты, например: [...]М,МИ.

### **Распределение часовой классно-урочной нагрузки**

Разделение объема урочных занятий и домашних заданий между школьными предметами может отражать разделение содержания между учителями. Переход от штатного расписания к новой системе оплаты труда, основанной на результатах, а не на часовой нагрузке может сделать гибкое распределение нагрузки между учителями реальным.

Программа реализуется из расчета 5 часов в неделю в 5–6 классах, 6 часов — в 7–9 классах. При этом в соответствии с предлагаемым примерным учебным планом в 7–9 классах не менее 1 часа в неделю из указанного общего числа должно отводиться на освоение материала информатики, работу учащихся с учителем информатики. При углубленном изучении математики (и смежных дисциплин, см. выше) школа может принять решение о выделении на область математики и информатики большего объема классных часов.

## **II. СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ**

Как было отмечено выше, описанное далее содержание представляет собой общее содержание математической компетентности выпускника программ основного общего образования. Это содержание формируется, в частности, уже в

начальной школе, а также в различных школьных предметах и вне школы.

## **Логика**

Логические значения высказываний. Употребление логических связок “если..., то”, “в том и только в том случае, если”, связки “для любого”, “существует”, выражение через них смысла союзов «и», «или». Имена и значения. Высказывания, содержащие переменные (имена), их значение при заданных значениях переменных.

Определение. Аксиомы и теоремы. Доказательство. Доказательство от противного (приведение к противоречию). Теорема, обратная данной. Подтверждающий и опровергающий пример (контрпример). Логический вывод, конструкции "так как..., то...", «значит...» и аналогичные.

Приемы, помогающую обнаружить ошибку в рассуждениях и вычислениях.

## **Базовые объекты**

Цепочка. Первый элемент, последний элемент, предыдущий элемент, следующий элемент. Замена элемента, подстановка цепочки вместо всех вхождений элемента.

Натуральные числа, десятичная система счисления.

Одномерные и двумерные таблицы, имена строк и столбцов, выбор элемента.

Совокупности, принадлежность, включение, сложение, объединение и пересечение для них. Множество (совокупность без повторяющихся элементов).

Понятия и обозначения для множеств: отношений принадлежности и включения, пустого множества, дополнения к множеству, объединения и пересечения множеств. Наглядное представление отношений между множествами с помощью диаграмм Эйлера.

## **Целые, рациональные и действительные числа**

Представление о стандартных числовых множествах и обозначения для них. Сумма и произведение числовых совокупностей (всех чисел из совокупности). [Двоичная система счисления, запись целых чисел в пределах от 0 до 1024.]М, МИ.

Свойства и признаки делимости. Простые и составные числа. Степень с целым показателем и ее свойства. Совокупность простых множителей натурального числа. НОД и НОК их представление как операций над совокупностями множителей. Деление с остатком. [Алгоритм Евклида поиска общей меры двух отрезков и НОД.] М, МИ

Целые числа, арифметические действия с ними. Множество рациональных чисел. Основное свойство дроби. Нахождение части от целого и целого по его части. Сравнение рациональных чисел. Арифметические действия с рациональными числами. Десятичные дроби. Сравнение десятичных дробей. Арифметические действия с десятичными дробями. Представление обыкновенной дроби в виде периодической десятичной; представление конечной десятичной дроби в виде обыкновенной.

Проценты; нахождение процентов от положительной величины и величины по ее процентам. Пропорция; основное свойство пропорции.

Квадратный корень, корень третьей степени из числа; [корень натуральной степени]М, МФ.

Свойства квадратных корней и их применение к преобразованию числовых выражений и вычислениям.

Несоизмеримость стороны и диагонали квадрата, понятие об иррациональном числе. [Доказательство иррациональности числа  $\sqrt{2}$ .]М, МИ.

Множество действительных чисел: бесконечных десятичных дробей. Знак и модуль числа. Целая и дробная части числа. Сравнение действительных чисел. Изображение чисел точками координатной прямой; арифметические действия с действительными числами в геометрическом представлении. Изображение и обозначение числовых промежутков.

Декартовы координаты на плоскости. Соответствие между парами чисел и точками на плоскости, между множествами пар и множествами точек. Прямые, параболы, гиперболы, окружности, задаваемые уравнениями.

Текстовое описание реальных или гипотетических ситуаций. Решение текстовых задач арифметическими способами: последовательным нахождением значений содержательно описанных величин.

### **Алгебраические выражения**

Подстановка выражений вместо переменных. Допустимые значения переменных.

Преобразование алгебраических выражений на основе свойств арифметических действий. Равенство алгебраических выражений при заданных значениях переменных. Тождество. [Доказательство тождеств.] М

Одночлены и многочлены. Степень многочлена. Сложение, вычитание, умножение многочленов. Преобразование произведения многочленов в многочлен. Формулы сокращенного умножения: квадрат суммы и квадрат разности, [куб суммы и куб разности]М, формулы разности квадратов, [суммы кубов, разности кубов]М. [Разложение многочленов на множители]М. [Компьютерное разложение на множители.]М, МИ. Многочлены от одной переменной. Стандартная форма многочлена от одной переменной. [Деление многочленов от одной переменной.] М, МИ.

Корень многочлена. Квадратный трехчлен; разложение квадратного трехчлена на множители.

Алгебраическая дробь. Основное свойство алгебраической дроби. Сложение, вычитание, умножение, деление алгебраических дробей. Дробно-линейное выражение, [выделение целой части]М,МФ.

### **Уравнения**

Корень уравнения. Следствие и равносильность уравнений.

Линейное уравнение. Квадратное уравнение: выделение полного квадрата, формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета. Решение уравнений, сводящихся к линейным и квадратным, в том числе дробно-рациональных. [Примеры решения уравнений третьей и четвертой степеней] М.

Уравнение с двумя неизвестными. Линейное уравнение с двумя

неизвестными. Решение уравнений в целых и натуральных числах.

Система уравнений с двумя неизвестными. Равносильность систем. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. [Решение систем нелинейных уравнений с двумя неизвестными] М.

Графическая интерпретация уравнения с двумя неизвестными. График линейного уравнения с двумя неизвестными; угловой коэффициент прямой; условие параллельности прямых. Графическая интерпретация систем уравнений с двумя неизвестными.

## **Неравенства**

Числовые неравенства и их свойства.

Неравенство с одним неизвестным. Равносильность неравенств. Линейные неравенства с одним неизвестным. Квадратные неравенства. Системы неравенств с одним неизвестным, их графическая интерпретация. [Графическая интерпретация неравенств с двумя неизвестными и их систем] М, МИ, МФ.

## **Функции**

Понятие функции, область определения и множество значений функции. График функции. Задание функций формулами; вычисления по формулам. Примеры графиков функций, задаваемых формулами и получаемых в результате измерений, в том числе цифровыми измерительными приборами с автоматической регистрацией. Компьютерное построение графика функции, заданной формулой.

Свойства функции, их отражение на графике. Примеры функций; прямая пропорциональность; обратная пропорциональность, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с показателем 3, [с натуральным показателем]М, МФ МИ, функции  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = \sqrt[3]{x}$ ,  $y = |x|$ , их свойства и графики.

## **Числовые последовательности**

Понятие числовой последовательности. Задание последовательности явной и рекуррентной формулой. Факториал. Доказательства по индукции.

Арифметическая и геометрическая прогрессии; формулы для элементов

арифметической и геометрической прогрессий, [суммы первых  $n$  членов арифметической и геометрической прогрессий]М, МИ. [Сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии, представление периодической десятичной дроби в виде обыкновенной.]М, МИ, МФ Изображение членов арифметической и геометрической прогрессий точками координатной плоскости. Линейный и экспоненциальный рост. Сложные проценты.

### **Случайные события и вероятность**

Понятие о случайном опыте и случайном событии. Частота случайного события. Статистический подход к понятию вероятности. Вероятности противоположных событий. Достоверные и невозможные события. Равновозможность событий; определение вероятности комбинаций равновозможных событий.

### **Геометрия**

Фигуры на плоскости и их наглядные представления: точка, прямая, отрезок, луч, угол, ломаная, вершины, отрезки ломаной, многоугольник, вершины стороны многоугольника, выпуклый многоугольник, окружность, круг. Треугольник, виды треугольников. Четырехугольник, прямоугольник, квадрат. Правильные многоугольники. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Изображение геометрических фигур и их конфигураций, именование элементов конфигураций.

Геометрическое место точек.

Сравнение отрезков, измерение одним отрезком другого. Длина отрезка, ломаной. Единицы измерения длины. Неравенство треугольника.

Сравнение углов. Виды углов. Градусная мера, измерение углов. Построение угла заданной величины. Вертикальные и смежные углы и их свойства. Биссектриса угла.

Параллельные и пересекающиеся прямые. Перпендикулярные прямые. Теоремы о параллельности и перпендикулярности прямых. Перпендикуляр и наклонная к прямой. Серединный перпендикуляр к отрезку. Свойства биссектрисы угла и серединного перпендикуляра к отрезку.

Равенство фигур. Центральная, осевая и зеркальная симметрии. Изображение симметричных фигур.

Медиана, биссектриса, средняя линия, высота треугольника. Равнобедренные и равносторонние треугольники; свойства и признаки равнобедренного треугольника. Признаки равенства треугольников. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Сумма углов треугольника. Внешние углы треугольника. Точки пересечения медиан, биссектрис, [высот]М треугольника.

Обобщенная теорема Фалеса. Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников.

Трапеция, средняя линия трапеции. Параллелограмм, его свойства и признаки. Прямоугольник, квадрат, ромб, их свойства и признаки. Определения, свойства, признаки и критерии в геометрии и математике.

Теорема Пифагора. Синус, косинус, тангенс, котангенс острого угла прямоугольного треугольника и углов от  $0$  до  $180^\circ$ , приведение к острому углу. Основное тригонометрическое тождество. Формулы, связывающие синус, косинус, тангенс, котангенс одного и того же угла. Теорема косинусов.

Многоугольник. Периметр многоугольника. Выпуклые многоугольники. Сумма углов выпуклого многоугольника. Правильные многоугольники.

Окружность и круг. Взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей, касание окружности и прямой, двух окружностей. Дуга, хорда. Центральный угол, вписанный угол; величина вписанного угла. Сектор, сегмент. [свойства касательной и секущей, угол между хордами, угол между секущими, угол между касательной и секущей]М.

Вписанные и описанные многоугольники. Окружность, описанная около треугольника. Теорема синусов. Окружность, вписанная в треугольник. [Вписанные и описанные окружности правильного многоугольника]М. Длина окружности, число  $\pi$ . Длина дуги окружности, площадь сектора, соотношение между величиной центрального угла и длиной дуги, площадью сектора.

Геометрические преобразования. Движения: осевая и центральная симметрии,

параллельный перенос, поворот. Подобие фигур и гомотетия. [Паркетное заполнение плоскости]М.

Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми.

Площадь фигуры; единицы измерения площади. Площадь прямоугольника, квадрата. Приближенное измерение площади фигур на клетчатой бумаге. Площади фигур при разрезании и составлении. Площади параллелограмма, треугольника и трапеции.

Построения с помощью циркуля и линейки, [схема решения задач на построение: анализ, построение, доказательство и исследование]М, МИ.

Построение, анализ, трансформация и исследование геометрических конфигураций в динамической геометрии.

Наглядные представления о пространственных фигурах: куб, параллелепипед, призма, пирамида, шар, сфера, конус, цилиндр. Изображение пространственных фигур. Примеры сечений. Многогранники. Правильные многогранники. Примеры разверток многогранников, цилиндра и конуса. Изготовление моделей пространственных фигур.

Объем; единицы объема. Объем прямоугольного параллелепипеда, куба.

Координатное представление геометрических фигур и соотношений: координаты середины отрезка, [деление отрезка в заданном отношении]М,МФ, формула расстояния между двумя точками плоскости; уравнение окружности.

Вектор, его геометрическое представление. Длина вектора. Равенство векторов. Коллинеарные векторы. Сумма и разность векторов, умножение вектора на число, разложение вектора по двум векторам. [Скалярное произведение векторов.]М, МФ,МЭ.

Решение задач на вычисление, доказательство и построение.

### **Алгоритмика**

Граф, наглядное представление: вершины, ориентированные и неориентированные ребра; ориентированные и неориентированные графы.

Начальная вершина (источник) и конечная вершина (сток) в ориентированном графе. Графы с весами на ребрах. Матрица смежности. Путь, его длина (вес), минимальный путь.

Дерево. Корень, лист, вершина (узел). Предшествующая вершина, последующие вершины. Поддерево. Высота дерева.

Исполнитель и среда (обстановка), состояния исполнителя и среды, система команд исполнителя: приказы, вопросы. Отказ. Алгоритм, алгоритмический язык, программа на языке, выражение последовательного выполнения, повторения, ветвления, присваивания; язык блок-схем.

Алгоритмы и программы, осуществляющие:

- нахождение минимального и максимального числа из двух, трех, четырех данных чисел;
- нахождение всех корней заданного квадратного уравнения;
- заполнение числового массива в соответствии с формулой или путем ввода чисел, считывания данных датчика;
- нахождение суммы элементов данной цепочки или одномерной таблицы;
- нахождение минимального (максимального) элемента массива;
- построение объекта последовательным выбором, дерево выборов, подсчет количества построенных объектов,
- [сортировку массива, выполнение поэлементных операций с массивами;
- операций сравнения по величине и сложения целых чисел, представленных как цепочки записями в десятичной и двоичной системах счисления перевод из двоичной системы счисления в десятичную и обратно;
- вычисление квадратного корня с высокой точностью;
- деления многочлена от одной переменной на многочлен первой степени (схема Горнера);
- нахождение наибольшего общего делителя (алгоритм Евклида)]М,МИ,МЭ;
- кодирование и декодирование, [в том числе – с исправлением

ошибки]М,МИ.

Реализации этих алгоритмов в выбранном алгоритмическом языке и среде программирования.

Комбинаторика. Правила сложения и умножения. Перестановки, сочетания и размещения.

[Этапы разработки программ: составление требований к программе, выбор алгоритма и его реализация в виде программы на выбранном алгоритмическом языке, отладка программы с помощью выбранной системы программирования, тестирование. Приемы диалоговой отладки программ (выбор точки останова, пошаговое выполнение, просмотр значений величин, отладочный вывод). Составление описание программы]МИ, М.

Сложность вычисления: количество выполненных операций, размер используемой памяти; их зависимость от размера исходных данных. Примеры коротких программ, выполняющих обработку большого объема данных, примеры коротких программ, выполняющих много шагов по обработке небольшого объема данных.

### **Измерения, приближения, оценки**

Размеры объектов окружающего мира (от элементарных частиц до Вселенной), длительность процессов в окружающем мире. Выделение множителя – степени десяти при записи числа.

Округление десятичных дробей. Оценка результатов измерений и вычислений.

Приемы рационализации вычислений.

Прикидка при преобразовании выражений, решении уравнений и неравенств. Использование для прикидки приближенных значений чисел в исходных данных и промежуточных результатах вычислений.

### **Описательная статистика**

Представление и получение данных в виде таблиц, диаграмм, графиков.

Статистические характеристики набора данных: среднее арифметическое, наибольшее и наименьшее значения, размах, медиана. Представление о выборочном исследовании. Компьютерная обработка и визуализация данных.

### **Моделирование.**

Понятие модели объекта, процесса или явления. Математическая и компьютерная модель. Переход от реальной ситуации к словесному описанию, математической модели и компьютерной модели.

Переход от текстового описания реальной или гипотетической ситуации к ее алгебраическому описанию. Решение текстовых задач алгебраическим способом: переходом к алгебраическому описанию учет ограничений – положительности, целочисленности и т. п., нахождение значений неизвестных. Использование математических и компьютерных моделей при решении научно-технических задач: построение математической модели, ее программная реализация, проведение компьютерного эксперимента, анализ его результатов.

Математические модели физических и иных процессов. [Синус, косинус, тангенс произвольного действительного числа.]М, МФ [Скорость изменения, как тангенс угла наклона касательной (прямой, наиболее близкой к графику). Изменение, как площадь под графиком зависимости скорости от времени]МФ,МЭ.

Динамические (электронные) таблицы. Формулы с использованием абсолютной адресации [Формулы с использованием относительной и смешанной адресации; преобразование формул при копировании. Выделение диапазона таблицы и упорядочивание (сортировка) его элементов]М, МИ, МЭ. Построение графиков и диаграмм.

[Базы данных, таблица как представление отношения. Поиск данных в готовой базе. Связи между таблицами]М, МИ, МЭ.

### **Математика и информатика в историческом развитии**

История формирования понятия числа: натуральные числа, дроби, недостаточность рациональных чисел для геометрических измерений,

иррациональные числа. Старинные системы записи чисел. Десятичная система в древней Индии. Дроби в Вавилоне, Египте, Риме. Открытие десятичных дробей. Старинные системы мер. Метрическая система мер. Появление отрицательных чисел и нуля.

От землемерия к геометрии. Пифагор и его школа. Фалес. Архимед. Построения с помощью циркуля и линейки. Построение правильных многоугольников. Трисекция угла. Квадратура круга. Удвоение куба. История числа  $\pi$ . Золотое сечение. «Начала» Евклида.

Софизмы, парадоксы, их роль в развитии математики.

История пятого постулата. Н. И. Лобачевский.

Зарождение алгебры в недрах арифметики. Ал-Хорезми. Рождение буквенной символики. П. Ферма. Ф. Виет. Р. Декарт. Нахождении формул для корней алгебраических уравнений: Древний Вавилон, Брахмагупта, итальянские математики XVI века. Неразрешимость в радикалах уравнений степени, большей четырех: П. Руффини, Н. Х. Абель, Э. Галуа.

Изобретение метода координат, позволяющего переводить геометрические рассуждения на язык алгебры. Р. Декарт и П. Ферма.

Математический анализ, математические модели в естествознании. И. Ньютон, Г. В. Лейбниц, Л. Эйлер, С. Ковалевская.

Теория вероятностей: риски, азартные игры. П. Ферма и Б. Паскаль. Я. Бернулли. П. Чебышев, А. Н. Колмогоров.

Математическая логика, аксиоматический метод и его ограниченность. Д. Гильберт, К. Гёдель.

Теория алгоритмов и математические машины. Ч. Бэббидж, А. Лавлейс. Первые универсальные компьютеры. А. Тьюринг, Дж. фон Нейман, С. А. Лебедев.

Математическое образование: Алкуин, Л. Магницкий. Л. Эйлер.

### **III. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ПРОГРАММЫ**

Как уже было сказано выше, результаты образования в области математики и информатики фактически являются результатами реализации всей ООП, а также

дополнительного образования и других образовательных процессов, в которые включен учащийся. Именно так мы и понимаем содержание настоящего раздела. Там, где это возможно и полезно, приводятся типичные примеры заданий, относящихся к тому или иному результату.

Программа, как это было отмечено выше, предусматривает различные варианты углубления (предпрофильного изучения).

Естественно, что последовательность прохождения материала менее существенна, чем сам итоговый объем и сбалансированность нагрузки по годам обучения. Традиционно в последовательности изложения в различных курсах и программах математики для основной школы имеется значительная вариативность. Такое вариативное построение рабочих программ образовательной организации возможно и исходя из данной примерной программы.

Речь идет, прежде всего о перестановке отдельных тем, в частности:

- Пропорциональность, теорема косинусов, векторная алгебра, тригонометрические функции любого действительного числа проходятся раньше, чем в ряде действующих программ.
- Теоремы, относящиеся к окружности, в том числе – о вписанных и описанных треугольниках и многоугольниках, теорема синусов проходятся позже, чем в ряде действующих программ.
- Анализ данных (статистика) включен в содержание курса на всем его протяжении (и фактически идет уже в начальной школе).

Математике принадлежит важнейшая роль и в формировании личностных и метапредметных образовательных результатов. При этом, как и в случае других школьных предметов, нецелесообразно, при сегодняшнем состоянии образовательной практики и способов ее описания, лишь недавно начатой реализации ФГОС, дифференцировать достижение этих результатов по годам обучения. Представляется полезным эти результаты охарактеризовать применительно к ступени обучения, имея в виду, что их достижение во многих случаях идет уже в начальной школе.

## Метапредметные результаты

- Представление о существовании, распространенности и полезности утверждений – предложений, для которых имеет смысл говорить об их истинности.
- Способность к точному пониманию и построению текста, в том числе:
  - описания, включающего свойства и характеристики объекта, числовые и иные;
  - определения понятия;
  - утверждения, в том числе утверждения всеобщности, существования, одновременной выполненности совокупности условий, или выполненности какого-то из них, утверждения о ложности чего-то, существования опровергающего примера к утверждению всеобщности;
  - доказательства, в том числе – разбором случаев, приведением к противоречию, приведением примера, опровергающего примера, и т.д.;
  - инструкции (алгоритма вычисления, организации деятельности), возможно включающей:
    - перебор объектов и вариантов действия;
    - разбиение задачи на подзадачи;
  - стратегии (алгоритма взаимодействия), в том числе – выигрыша.
- Способность к:
  - представлению сложного объекта в виде системы взаимодействующих более простых, об обмене информацией в сложных системах;
  - счету и измерению, визуализации данных, интерпретации данных и их массивов;
  - использованию компьютера, других цифровых устройств и экранного интерфейса для создания, именованию, сохранения, передачи, поиска и получения (приема, извлечения из информационных хранилищ) информационных объектов, в том числе – текстов, изображений, гипер-медиа, соблюдая принципы и требования информационной этики, права, безопасности;
  - построению модели, учета ограничений моделирования, соотнесения модели и результатов моделирования с реальностью;

- построению объекта по описанию.

### **Личностные результаты**

- Умение использовать в повседневной практике логические методы рассуждения, доказательства, убеждения, определения понятий.
- Способность к:
  - взаимодействию с другими людьми в формализованных контекстах;
  - построению формальных моделей человеческого мышления и коммуникации;
  - поиску ошибки в своем рассуждении и алгоритме;
  - рациональному поведению, в том числе – в сложной, неизвестной, неопределенной, непредсказуемой ситуации, а также в игровых ситуациях, где требуется многократный выбор в зависимости от действий других участников и состояния среды;
  - визуализации абстрактных объектов:
    - в виде образов на бумаге или экране;
    - в мире внутренних образов, отражающих существенные черты объектов, в том числе, образов геометрических, пространственных;
  - прикидке:
    - границ и вероятных значений различных величин физической и социальной реальности;
    - степени возможности, вероятности, случайности, зависимости, в том числе – при анализе, предсказании, планировании, принятии решений о собственной деятельности, карьере, жизненном пути;
  - возможности, сложности и реальности вычисления.
- Уверенность в объективном значении и ценности математических утверждений, в общезначимости математических объектов.
- Представление о важности математической деятельности для развития человечества и будущего России.
- Усвоение принципов информационной этики и безопасности, законодательных

норм, и следование им.

- Понимание того, что:
  - математические и формальные методы моделирования и познания мира ограничены,
  - возможно построение математики как аксиоматической теории, и в ней всегда будут недоказуемые и непроверяемые утверждения (Гильберт и Гёдель);
  - всякое вычисление может осуществляться одной и той же простой машиной с разнообразными программами (тезис Чёрча и универсальная вычислимость), и что именно так работают современные компьютеры; существуют алгоритмически неразрешимые проблемы;
  - сложностью объекта может считаться минимальный объем его описания (Колмогоров);
  - гипотезой номер один современной математики является невозможность действовать быстрее, чем перебором, во многих естественных задачах, понимание, что это делает многие задачи «практически» нерешаемыми.
- Эстетическое восприятие математических построений и результатов.
- Уважение к математической деятельности и интеллектуальному труду вообще.
- Осознание интеллектуального величия математических достижений и драматизма пути их достижения.

## **Требования к результатам освоения программы по классам**

### **5-6 класс**

В математическую компетентность выпускника 6-го класса входят все элементы математической компетентности выпускника начальной школы, расширенные за пределы наглядности, а также – за счет перехода от целых чисел к рациональным: обыкновенным и десятичным дробям, возможность использовать имена (переменные) в алгебраических выражениях, решение уравнений.

**При поступлении в 5-ый класс учащийся уже умеет:**

- использовать соответствие между именем и значением;
- различать истинные и ложные утверждения; устанавливать истинность утверждения в различных ситуациях, в частности, при различных значениях входящих в него имен; понимать смысл словосочетаний «для всех», «существует» в применении к утверждениям и к объектам;
  - строить какой-нибудь объект, соответствующий данному описанию; строить множество всех таких объектов;
  - строить математические рассуждения: цепочки шагов в доказательстве, разбирать случаи, приводить контрпример к общему утверждению;
  - строить древесные классификации;
  - строить и применять алгоритм систематического перебора вариантов, в том числе с использованием дерева перебора.

*Примеры:* задача о поиске двух одинаковых объектов в совокупности (представленной графически), задача о рюкзаке (с реальными пластинами целых длин), задача о поиске кратчайшего пути в графе (сети дорог);

- строить совокупности всех объектов, удовлетворяющих условию, определять количество элементов совокупности;
- строить, исходя из «нужного и возможного», и применять линейный алгоритм последовательного нахождения неизвестных величин (присваивания содержательным именам значений) по реальной ситуации или ее описанию в задаче.

*Примеры:* «арифметическое» решение задачи «по вопросам» с последовательностью арифметических действий и присваиваний;

- выполнять и строить в стандартных обозначениях алгоритмы и программы, использующие ветвление и повторение, в том числе в структурном экранном редакторе.

*Примеры:* алгоритмы для робота в лабиринте;

- играть в игру с полной информацией, действовать по заданной стратегии, строить дерево игры, стратегию выигрыша.

*Примеры:* игра «Ним» (есть несколько куч камешков, игроки по очереди берут камешки, на количество берущихся за один ход камешков наложено ограничение);

- формулировать законы арифметики (переместительный и сочетательный, распределительный) и использовать их при вычислениях; уметь наглядно иллюстрировать справедливость этих законов;

- оперировать со словами и словосочетаниями: числовыми (до миллиарда) и логическими (“каждый”, “существует”, “рассмотрим случай”, “выполнено одновременно”, “не”, «отсюда следует», «проверим» и т. п.), наименованиями базовых объектов, их частей, операций над ними и отношений между ними, словами, относящимися к измерениям, распознавать и называть многоугольники с различным числом сторон, прямоугольники, квадраты, круги;

- выполнять операции с совокупностями, цепочками, одномерными и двухмерными таблицами, в том числе складывать совокупности, строить объединение (максимум), пересечение (минимум) совокупностей, строить таблицу по совокупности, совокупность по таблице; находить следующий элемент цепочки и т. п.;

- пересчитывать предметы (выписывать соответствующее десятичное число) в количестве до десяти тысяч;

- устанавливать соответствие между (десятичными) числами и их изображениями на числовой прямой, площадями полосок;

- заполнять одномерную и двумерную таблицу данными.

*Пример:* строить таблицы сложения и умножения (чисел от 0 до 9);

- отыскивать в таблице аргументы по заданному значению функции от одного аргумента, и второму аргументу в случае функции двух аргументов.

*Пример:* отыскивать результат вычитания или деления в таблицах сложения и умножения;

- устанавливать соответствие между парами чисел (одномерными таблицами длины 2) и точками на плоскости, между множествами пар и множествами точек;

- выполнять арифметические действия с десятичными числами в уме (для умножения и деления — двухзначных чисел на однозначные, для сложения и вычитания — двухзначных чисел), используя алгоритмы вычисления «в столбик» (для умножения и деления — на однозначное число), калькулятор; формулировать алгоритмы и демонстрировать соответствие вычислений в пределах сотни наглядному представлению;

- выполнять сравнение (десятичных целых) чисел, использовать транзитивность отношений «больше» и «меньше», формулировать алгоритм и демонстрировать его соответствие в пределах сотни наглядному представлению;

- сравнивать отрезки по длине;

- измерять длины отрезков; определять длину ломаной, периметр многоугольника, периметр прямоугольника по двум его сторонам;

- считывать показания цифровых приборов;

- оперировать с температурой, иметь представление о положительных и отрицательных температурах;

- оперировать со временем, с разбиением года, суток, часа, минуты, выполнять действия прибавления и вычитания интервалов времени; считывать показания аналоговых часов;

- оперировать с весом, с разбиением тонны на килограммы, килограмма на граммы;

- оперировать с мерами длины: километр, метр, сантиметр, миллиметр, и соответствующими мерами площади, с гектаром, аром (“соткой”), объема и вместимости: кубический метр, кубический дециметр

(литр), кубический сантиметр ;

- строить одномерные числовые таблицы и их представления столбчатыми диаграммами (дискретными графиками) от руки на бумаге, вводя данные в компьютер, представляя уже имеющиеся в компьютере данные, загружая в компьютер данные, автоматически собранные цифровыми датчиками; упорядочивать данные, находить наибольшее и наименьшее значение, строить гистограммы, диаграммы пошагового изменения.

*Примеры:* данные учеников класса: дни, недели, месяцы, годы рождения, рост, вес, любимые занятия; погода в течение дня и по дням;

- строить планы местности (класса, школьного этажа, участка), используя измерения, спутниковое позиционирование, нанося на них дополнительные данные;

- находить площади многоугольников с целочисленными вершинами, основываясь на площадях более простых фигур (прямоугольников и прямоугольных треугольников);

- составлять заданную геометрическую фигуру, используя данную совокупность фрагментов.

*Примеры:* танграм, кубики Никитина;

- вычислять объем прямоугольного параллелепипеда;
- сопоставлять трехмерный объект с возможной системой проекций;

- использовать компьютер и экранный интерфейс для создания, именованя, сохранения, передачи, поиска и получения (приема, извлечения из информационных хранилищ) информационных объектов, в том числе – текстов, изображений, гипер-медиа, соблюдая принципы и требования информационной этики, права, безопасности.

Перечисленные элементы математической компетентности выпускника начальной школы формируются и применяются, прежде всего, в визуальном, наглядном контексте. Одной из задач последующего образования является их

перенос в более общий контекст: не наглядный, и, там, где это полезно – не математический.

**К завершению 6-го класса выпускник дополнительно (по сравнению с выпускником 4-го класса) научится:**

- выполнять арифметические действия с десятичными числами в уме (сложение и вычитание трехзначных чисел, умножение и деление — двухзначных чисел на однозначные), используя алгоритмы вычисления «в столбик» (для деления — на двухзначное число, для умножения — четырехзначных чисел),

- использовать натуральные показатели степени и операции над показателями степеней с одним основанием, соответствующие умножению, делению и возведению в степень;

- находить совокупность простых множителей натурального числа (разлагать число на простые множители), находить произведение, НОД и НОК чисел, оперируя совокупностями простых множителей; знать признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, знать числа, кратные 11 и 7 в пределах ста, и использовать эти знания при разложении натурального числа на простые множители;

- выполнять операции над рациональными числами (в форме обыкновенных и десятичных дробей), приводить обыкновенную дробь к стандартному виду (целое с правильной несократимой дробью); пользоваться процентами и пропорциями;

- использовать запись числа в десятичном виде с множителем — степенью 10 для выражения размеров объектов, длительности процессов в реальном мире, переходить к обычной записи, сравнивать числа, записанные в таком виде;

- находить приближения десятичных чисел с требуемым числом разрядов до или после запятой, с недостатком или избытком;

- подставлять одно математическое выражение (в частности, число)

вместо переменного имени в другое выражение; частности, вычислять значение выражения при заданных числовых значениях входящих в него переменных. Устанавливать отсутствие значения, если в ходе вычисления знаменатель выражения оказывается равен нулю;

- использовать оценки (интервалы для значений величин) в реальных измерениях и вычислениях;
- проверять истинность равенств и неравенств при заданных значениях переменных;
- тождественно преобразовывать математические выражения, учитывая скобки и приоритеты арифметических операций, пользуясь законами арифметики, пользоваться сохранением значения выражения при любых значениях переменных;
- решать уравнения с одним неизвестным: находить их область истинности, изображать решение уравнения на числовой прямой.

*Пример:* решать линейные уравнения с одним неизвестным;

- выражать переменную из равенства.

*Пример:* Выразить переменную из равенства, линейного относительно нее;

- преобразовывать неравенства (“больше”, “меньше”) математических выражений, сохраняя их истинность при любых значениях переменных, пользуясь законами арифметики, свойствами равенства и неравенства;
- решать неравенства с одним неизвестным – находить их область истинности, изображать решение неравенства на числовой прямой.

*Пример:* решать линейные неравенства с одним неизвестным;

- упорядочивать и группировать данные вручную и с помощью компьютера, используя среду динамических таблиц. Находить наибольшее, наименьшее, сумму, среднее ряда чисел;

**моделировать:**

- исходя из предложенных физических закономерностей, выражать одни переменные через другие, находить значение неизвестной переменной, если заданы значения других переменных.

*Примеры, законы* (предлагаемые учащемуся до их изучения в курсе физики):

- равномерного прямолинейного движения;
- упругой деформации;
- изменения потенциальной энергии;
- работы постоянной силы;
- переходить от реальных ситуаций и процессов к их словесному описанию;
- переходить от словесного описания к графическому, числовому и формульному и обратно;

**используя:**

- формульные описания;
- словесные описания;
- совокупности, цепочки, деревья, числа, таблицы, геометрические объекты и операции над ними; их графические представления;
- в том числе решать задачи, где используется:
  - суммирование изменения со временем,
  - суммирование однонаправленных и противоположных эффектов двух процессов,
  - представление натурального числа в виде суммы кратных двух или трех заданных чисел,
  - нахождение наибольшего числа, кратного заданному и не превосходящего другое данное (пример: “найти наибольшее количество заданных предметов, которое можно купить в пределах заданной суммы”); нахождение наименьшего кратного данного числа, не меньшего другого данного (пример: “найти наименьшее количество

заданных транспортных средств, достаточное для перевозки заданного груза”);

- математические описания в форме диаграмм, представляющих количества площадями и длинами, множества однородных величин областями на целочисленной прямой и на целочисленной плоскости;

**получая результаты** в виде числовых и иных объектов, утверждений, экранных объектов, ситуаций, процессов;

**интерпретируя** результаты моделирования.

*К завершению 6-го класса выпускник имеет возможность научиться:*

- использовать приемы, рационализирующие деятельность, выбирая подходящий для ситуации способ решения задачи.

*Примеры:* выбор правильного порядка вычисления, использование формул сокращенного умножения;

- использовать приемы, помогающие повысить надежность, обнаружить ошибку в рассуждениях и вычислениях; выполнять прикидку при преобразовании выражений, решении уравнений и неравенств. Использовать для прикидки приближенные значения чисел в исходном данном и промежуточных результатах вычислений, соображения геометрической и физической реализуемости;
- распознавать квадраты натуральных чисел, меньших 20;
- умножать в уме двухзначные числа, делить трехзначные числа на однозначные;
- осознавать трудности, возникавшие на пути развития арифметики и алгебраических обозначений.

## **7-8 класс**

В математическую компетентность после 8 класса входят все приведенные выше элементы математической компетентности после 6 класса.

**К завершению 8-го класса выпускник дополнительно (по сравнению с выпускником 6-го класса) научится:**

- представлять себе действительные числа, как бесконечные десятичные дроби; сравнивать действительные числа по величине; вычислять десятичные дроби, в интервале требуемой длины между которыми находится рациональное число (используя деление “в столбик”), выписывать предпериод и период получающейся периодической десятичной дроби;
- [строить и применять алгоритм Евклида поиска общей меры двух отрезков и НОД]М,МИ, [строить программу для алгоритма Евклида] МИ;
- использовать операцию и обозначение для извлечения квадратного корня; сравнивать по величине квадратный корень из рационального числа с рациональным числом; [уметь доказывать иррациональность числа  $\sqrt{2}$  и несоизмеримость стороны квадрата и его диагонали]М,МИ; приближенно вычислять квадратные корни с помощью калькулятора; [строить алгоритм для вычисления квадратного корня с высокой точностью]МИ,М [и программу для него]МИ;
- использовать экспоненциальное обозначение и вычислять значения степеней с целыми показателями; [строить алгоритм для быстрого вычисления степени, базируясь на умножении] МИ, М [и программу для него]МИ;
- [строить алгоритмы для перевода из двоичной записи в десятичную и обратно; для операций сравнения по величине и сложения целых чисел, представленных как цепочки записями в десятичной и в двоичной системах счисления,]МИ,М [и программы для этих алгоритмов]МИ;
- знать формулы сокращенного умножения для квадрата суммы и разности, разности квадратов, [использовать их, формулы для куба суммы и разности, суммы и разности кубов, и законы арифметики для рационализации арифметических и алгебраических преобразований]М, МФ;

- знать определение стандартного вида многочлена от одной переменной; приводить многочлен к стандартному виду; знать определение корня многочлена; [для схемы Горнера деления многочленов описывать и применять алгоритм, строить программу]М, МФ, МИ;
- находить корни многочлена второй степени или устанавливать, что их нет; строить алгоритм и программу нахождения всех корней заданного квадратного уравнения;
- решать рациональные уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным, [в том числе, используя разложение на множители, замену переменных]М, МФ;
- разлагать многочлен на множители, в том числе – [вручную]М и в системах компьютерной алгебры; разлагать на множители многочлен второй степени от одной переменной, используя формулу корней [или выделяя полный квадрат]М;
- находить значение функции по заданному значению аргумента;
 

Пример: функции нескольких переменных, кусочно-заданные алгебраическими выражениями, в частности,  $y = |x|$  и  $y = \frac{k}{x}$ ,  $z = (ax + by)(cx + dy)$ ,  $k, a, b, c, d$  - рациональные числа, [функции, в задании которых участвуют арифметические операции и модуль]М, МФ;

строить одномерную таблицу значений функции одной переменной при заданном конечном наборе значений переменной;
- находить область определения функции одной переменной, отмечать ее на числовой прямой;
 

*Пример:* для функций, заданных алгебраическими выражениями, отбрасывать корни знаменателей;
- строить график функции одной переменной, осуществлять трансформации графика, соответствующие модификациям функции (добавлению константы к аргументу и значению функции, [умножения аргумента и значения функции на число]М, МФ), в том числе:

- с помощью компьютера или графического калькулятора,
- без компьютера: линейных и квадратичных функций; функций:  $y = |x|$  и  $y = \frac{k}{x}$ , [кусочно-заданной алгебраическим выражением]М, МФ, МЭ;
- указывать на графике нули, точки минимума и максимума, [промежутки монотонности]М, МФ, МЭ.
- [строить программу для построения графическим исполнителем наброска графика функции, с использованием процедуры, дающей значение функции по ее аргументу]МИ.
- строить набросок графика алгебраической функции, (пример: отношение двух функций одна из которых – линейная, другая - квадратичная); [получающихся в результате умножения и деления нескольких линейных функций]М, МФ, находить область определения, множество значений, нули, промежутки знакопостоянства; Решать соответствующие алгебраические неравенства «методом интервалов»;
- программировать заполнение числового массива в соответствии с формулой или путем ввода чисел, [считывания данных датчика] МФ, МИ; [сортировку массива, выполнение поэлементных операций с массивами] МИ;
- с помощью компьютера строить график измерений, проводимых цифровым датчиком и интерполировать результаты измерений; [знать определение и уметь вычислять квадратичное отклонение в серии измерений; сопоставлять результаты измерения с теоретическим предсказанием]МФ,М.
- давать качественное словесное описание процесса по графику значения параметра, как функции времени. Обеспечивать движение тела в пространстве так, чтобы график перемещения был близок к заданному;
- [выполнять оценку значения алгебраического выражения, если известны оценки (интервалы) для значений входящих в него переменных]

М,МФ,МЭ;

- программировать нахождение суммы элементов данной цепочки или одномерного массива чисел, минимального и максимального числа из двух, трех, четырех данных чисел; минимального (максимального) элемента массива;
- анализировать данные, собираемые вручную, имеющиеся в компьютере или получаемые в результате цифровых измерений; вести анализ вручную, [с применением программ статистической обработки, с использованием динамических таблиц или процедурного программирования, используя обработку таблиц (массивов)]МИ. [программировать динамическую таблицу для нахождения частот отдельных значений последовательности]М, МЭ;
- представлять данные в виде таблиц и диаграмм распределения частот, находить среднее значение, объем, размах, моду, медиану ряда данных]МИ, МЭ. Извлекать количественную и качественную информацию о данных из таблиц, диаграмм и графиков;
- оперировать с комбинаторными конструкциями: построение объекта последовательным выбором, дерево выборов, подсчет количества построенных объектов, сумма (альтернативный выбор) и произведение (последовательный независимый выбор) при подсчете количества объектов, перестановки, сочетания; знать определение и обозначение для функции факториал; [строить программы создания комбинаторных объектов] МИ, М; программы кодирования и декодирования [в том числе – с исправлением ошибки]М, МИ;
- проводить экспериментальное наблюдение частот случайных событий (бросание кубика, случайности в явлениях окружающего мира), наблюдать статистическую устойчивость; [пользоваться генератором псевдослучайных чисел]М, МЭ, МИ; находить вероятности событий, получающихся как комбинации равновероятных;
- приводить различные примеры достоверных, невозможных, случайных и

несовместных событий, распознавать их в конкретных ситуациях; формулировать конкретные ситуации, в чем состоит событие, противоположное данному; сумма и произведение двух случайных событий; использовать теоремы о вероятности суммы несовместных событий, вероятности противоположного события;

- определять на геометрическом чертеже прямые, точки, отрезки, углы, треугольники, в том числе по именам, имеющимся на чертеже; строить геометрический чертеж, присваивать имена объектам на чертеже (вручную и в среде динамической геометрии);
- применять неравенство треугольника, утверждение о кратчайшей линии, соединяющей две точки;
- сравнивать углы, измерять углы транспортиром, в среде динамической геометрии; знать и применять свойства вертикальных и смежных углов;
- применять признаки равенства треугольников;
- применять определение параллельности, аксиому о параллельности, признаки и свойства параллельных прямых;
- применять теорему о сумме углов треугольника, теорему о внешнем угле треугольника;
- применять определения параллелограмма, трапеции, ромба, прямоугольника, квадрата; их признаки и свойства;
- применять определение прямого угла, высоты треугольника и параллелограмма;
- доказывать (с использованием формулы площади прямоугольника) и применять формулы площади параллелограмма, треугольника, трапеции;
- применять утверждение о пропорциональности отрезков, отсекаемых параллельными прямыми на двух прямых: (обобщенную) теорему Фалеса;
- применять определение подобных многоугольников, свойство равенства соответствующих углов, понятие коэффициента подобия и свойство отношения площадей подобных треугольников, выявлять и использовать подобие геометрических фигур;

- доказывать и применять теорему Пифагора; использовать тригонометрические функции угла, меньше развернутого; доказывать и применять теорему косинусов;
- использовать понятие вектора на плоскости, изображать векторы, откладывать вектор от точки («приложение к точке»); использовать свойства линейных операций над векторами и скалярного произведения векторов, длины вектора, их выражения в координатах;
- доказывать геометрические утверждения при решении задач на доказательство, вычисление, построение, используя аксиомы и ранее доказанные теоремы; проверять возникающие гипотезы в среде динамической геометрии. [при углубленном изучении исследовать геометрические конфигурации с большим числом элементов, требующие большего числа дополнительных построений, большего количества применений ранее известных фактов, рассмотрения большего количества гипотетически возможных конфигураций, доказательства от противного]М;
- выполнять [и создавать]М, МИ алгоритмы геометрических построений циркулем и линейкой, в том числе – в среде динамической геометрии. Решать задачи на построение: проведение перпендикуляра к прямой, деление отрезка пополам и на несколько равных частей, проведение через данную точку прямой параллельной данной, построение треугольника по его элементам.
- решать задачи, описывающие реальную или гипотетическую ситуацию, предполагающие:
  - анализ процесса с линейным или квадратичным законом изменения;
  - анализ совместной, со-направленной или противонаправленной деятельности;
  - анализ геометрической конфигурации, в том числе — описывающей ход лучей в оптических системах;
  - [сложение и разложение векторов по осям при решении задач статики

и динамики, в том числе при анализе движения тела по наклонной плоскости, движения тела, брошенного под углом к горизонту, равномерного движения тела по окружности]МФ;

- оптимизацию расходов, варианты которых задаются кусочно-линейными функциями от исходного параметра, используя графическую иллюстрацию, там, где это полезно, вводя переменные для обозначения неизвестных величин, с последующим решением линейных или квадратных уравнений с одним неизвестным.

***К завершению 8-го класса выпускник имеет возможность научиться:***

- конструировать геометрические объекты, используя бумагу, пластилин, проволоку и др.;
- наглядно представлять пространственные фигуры: куб, параллелепипед, призму, пирамиду, шар, сферу, конус, цилиндр;
- изображать пространственные фигуры и примеры сечений в них;
- распознавать и называть многогранники, в том числе – все правильные;
- строить примеры разверток многогранников, цилиндра и конуса. определять вид простейших сечений пространственных фигур (тел), получаемых путем предметного или компьютерного моделирования;
- приводить примеры геометрических преобразований, строить образы геометрических фигур при заданных преобразованиях, конструировать орнаменты и паркетные узоры, изображая их от руки, с помощью инструментов, а также используя компьютер.

## **9 класс**

Основными элементами компетентности к концу 9 класса являются умение строить графики тригонометрических функций, освоение понятия касательной, строить кривые и фигуры, заданные уравнениями и неравенствами на плоскости, использовать свойства окружности, вписанных и описанных многоугольников,.

**По завершении 9 класса учащийся может:**

- пользоваться определениями и обозначениями тригонометрических функций произвольного действительного числа, понимать их периодичность и уметь строить их графики, в том числе в системах компьютерной алгебры, а также измеряя величины вручную и в динамической геометрии, знать примеры физических процессов, с синусоидальным законом изменения;
- [экспериментально, в том числе с помощью компьютера, приближенно отыскивать касательную, как прямую, возможно более близкую к кривой, и приближенное значение скорости изменения (производной) для различных процессов. С помощью компьютера получать графическое и формульное представление скорости изменения для элементарных функций]М, МФ, МЭ;
- [строить наброски графиков производной для квадратичных, кубических функций, синуса и косинуса. Строить графики производных элементарных функций в системах компьютерной алгебры]М, МФ;
- [представлять себе изменение величины, как площадь под графиком скорости изменения, использовать ручные вычисления для нахождения изменения в процессах с постоянным ускорением и системы компьютерной алгебры в других случаях]М, МФ, МЭ;
- применять определение касательной к окружности и доказывать перпендикулярность касательной и радиуса, проведенного в точку касания; [проверять вручную и с помощью компьютера, что касательная наиболее близка к окружности]М, МФ, МИ;
- [экспериментально, в виртуальной лаборатории, находить вектор скорости и ускорения для тела, движущегося по окружности]МФ;
- находить множество решений системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными;
- наглядно представлять на плоскости множества решений линейных уравнений и неравенств с двумя неизвестными;
- приводить примеры уравнений окружности, прямой, параболы, гиперболы;

- [решать уравнения с модулем; применять при решении систем уравнений различные методы, включая замену переменных, интерпретировать и оценивать результат]М;
- использовать различные способы задания числовой последовательности как функции натурального аргумента: формулой общего члена, графиком, таблицей, моделировать реальные ситуации с помощью последовательностей;
- применять определения арифметической и геометрической прогрессий как последовательностей; доказывать формулы для суммы первых членов прогрессий. Использовать формулы общего члена и [суммы подряд идущих членов арифметической и геометрической прогрессий]М, МЭ, МИ, производить расчеты простых и сложных процентов. [Знать формулу для бесконечной геометрической прогрессии; уметь использовать эту формулу для перехода от бесконечной периодической десятичной дроби к равному ей рациональному числу; понимать природу возможности записи конечной десятичной дроби в виде бесконечной, где начиная с какого-то места идут одни девятки]М, МФ, МИ, МЭ;
- применять определения вписанного угла, окружности, вписанной в многоугольник и описанной около многоугольника; теорему о центре вписанной в треугольник окружности;
- доказывать и применять теоремы:
  - о связи между величинами вписанного и центрального углов;
  - синусов;
  - [о длине касательной и секущей]М;
  - [об углах, о сторонах и диагоналях вписанного четырехугольника, о сторонах описанного четырехугольника]М;
- знать и использовать формулы длины окружности и площади круга, знать целую часть и по крайней мере два первых знака после запятой приближения числа  $\pi$ .

***К завершению 9-го класса выпускник имел возможность научиться:***

- содержательным неформальным представлениям, относящимся к понятию предела;
- преобразовывать периодическую десятичную дробь в обыкновенную;
- проводить натурные и компьютерные эксперименты по нахождению длины окружности и площади круга с применением идеи геометрического приближения многоугольника к окружности и геометрической вероятности.

#### **IV. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫБОРУ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ И ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

Особенность математического образования, ясно выраженная в российском школьном математическом образовании, состоит в том, что **образованность проявляется в умении решать задачи** (понятие решения задачи включает в себя и доказательство теорем, и проверку гипотез, и моделирование реальности и др.). Такой деятельностный характер результатов является достоинством российской традиции. Это достоинство должно быть сохранено и расширено за счет повышения веса умения моделировать реальные и гипотетические ситуации и интерпретировать результаты моделирования. Все вместе эти умения образуют математическую компетентность. Особо подчеркнем, что декларируемая в течение десятилетий важность моделирования все эти десятилетия не наращивалась, а снижалась, даже в отношении текстовых задач. Лишь в последние годы радикальной, и при этом конструктивно воспринятой учителем, мерой изменения ситуации стало введение «реальной математики» в государственную итоговую аттестацию за 9-й класс.

Указанная особенность подчеркнута и усилена во ФГОС. В современной педагогической терминологии она представлена как деятельностный характер образовательного процесса.

Ключевым событием в направлении выявления требований к достигаемой математической компетентности стало введение ЕГЭ, за которым последовало даже более существенное введение **государственной итоговой аттестации** за основную школу. ГИА ежегодно задает требования к выпускникам 9-го класса явным предъявлением соответствующих заданий. Этот мощный и эффективный механизм,

однако, обладает рядом существенных недостатков:

1. Модель деятельности учащегося ограничена используемым форматом: невозможность коллективной работы, закрытость задания, жесткое ограничение времени и т. д.
2. Шкала оценивания заданий не отражает их относительную сложность в различных естественных смыслах.
3. Реальные экзаменационные материалы в значительной степени аналогичны демонстрационным материалам, объявляемым девятиклассникам в начале учебного года. Тем самым реализуется (не являющаяся неминуемым следствием ГИА или ЕГЭ) опасность натаскивания на ГИА – решение серий задач того типа, который предлагается демоверсией.

Некоторые недостатки ЕГЭ преодолеваются, в частности, **применением олимпиад** как альтернативного оценивания результатов и интеграцией различных форм оценивания результата в портфолио.

Важным элементом в формулировании требований к математической компетентности является формирование **открытого банка заданий** по математике. Необходимо создание банка всех заданий различных типов, задания должны быть снабжены эффективными описаниями, решениями, возможными последовательностями прохождения материала (почасовым планированием и т. д.). Из этого банка могут браться, в частности, все задания для ГИА. Пока реализован только банк заданий, ограниченный заданиями, ориентированными на использование в ГИА.

Наличие ГИА и открытого банка заданий не снимает проблемы создания нормативно-методических документов, характеризующих необходимый уровень математической компетентности выпускников основной школы, на основе которых строятся, в частности, так называемые кодификаторы для ГИА.

Дифференциация обучения в основной школе в соответствии с действующей нормативной базой обеспечивается за счет **индивидуализации и дополнительного образования**. При этом в ходе текущей и итоговой аттестации, формирования портфолио для учащихся формируются рекомендации по продолжению

образования в одном из следующих потоков старшей школы:

- *Математическая грамотность:* при отрицательном результате ГИА обеспечивается возможность повторной сдачи и освоения математического содержания основной школы с элементами содержания старшей школы;
- *Математическая культура:* освоение математического содержания, направленное на общее развитие мыслительных и коммуникативных навыков обучающихся (в частности способностей к логической аргументации, четкому формулированию понятий и т. д.), раскрытия и иллюстрирования важности математики в современном мире, культурно-исторической роли математики, истории математических идей и достижений;
- *Математические технологии и приложения:* освоение математического содержания, направленное на его интенсивное использование при продолжении образования и в последующей профессиональной деятельности, в частности навыков ручных и компьютерных преобразований, построения и использования математических моделей, программирования;
- *Фундаментальная математика:* развитие творческих математических способностей учащихся, индивидуальное выявление наиболее перспективных областей дальнейшего образования и деятельности.

Применения математики в современном мире практически всегда связаны с цифровыми технологиями. Исключение составляет работа профессионального математика-теоретика, который получает новые результаты (доказывает теоремы, вводит определения), где компьютер занимает сегодня периферийную роль. Безусловно, роль математического образования никак не может быть сведена к чисто прикладному его аспекту. Поэтому бескомпьютерное решение задач по-прежнему должно оставаться основным видом деятельности на уроках математики. При этом почти для всех типов заданий учащийся должен получить **опыт применения компьютера** для их выполнения. Разумно, чтобы компьютерные инструменты давали возможность учащемуся получить как «школьное» решение, доказательство и т. д., так и принципиально иное, если это имеет смысл. Бескомпьютерное выполнение задания может специально поощряться. Но при этом

учащийся должен получить опыт того, что во многих случаях с помощью компьютера он может решать более сложные задачи. Наиболее очевидными **областями применения компьютера** являются:

- динамическая геометрия (быстрое и аккуратное построение чертежа, возможность непрерывной трансформации конфигурации на экране и выполнения измерений, проверка гипотез с применением указанных средств);
- решение алгебраических уравнений и неравенств и их систем, другие элементы компьютерной алгебры (разложение на множители, нахождение производной и первообразной);
- визуализация – в частности, построение графиков, траекторий динамических систем, представление на экране математических процессов, меняющихся в «математическом времени» (в том числе дискретном) объектов;
- измерение, сбор, регистрация числовых данных;
- обработка больших массивов числовых данных;
- вычисления по формулам, в том числе организованным в динамические (электронные) таблицы;
- моделирование вероятностных явлений (экспериментальная демонстрация частот и т. д.);
- создание и выполнение программ и стратегий взаимодействия, прежде всего в визуальной среде.

Освоение этих математических технологий сегодня становится необходимой частью математического образования, как и частью общей культуры. Однако большинство учителей математики в России (как и в некоторых других странах) проявляют естественный консерватизм и отрицательно относятся к использованию компьютера при решении задач, поскольку компьютер существенно меняет привычную для учителя деятельность ученика в таком решении.

С точки зрения видов учебной деятельности и спектра осваиваемых умений применение компьютера обеспечивает большую индивидуализацию и эффективность образовательного процесса:

- Для всех учащихся возникает возможность достижения оптимального баланса

между различными видами учебной деятельности: вычислениями, планированием своей деятельности, рассуждением, прикидкой, построением модели, интерпретацией результата и т. д.

- Сегодня зачастую от более слабых учащихся требуют только вычислительных навыков. В связи с давлением со стороны ГИА (и вообще применением заданий, где требуется только верный ответ или выбор ответа) эта ситуация усугубляется. Решение задач с помощью компьютера позволяет более медленно работающим учащимся не отказываться вовсе от решения более сложных задач, а решать их, используя инструменты; простые задачи они решают без компьютера.
- Более сильные учащиеся, легче справляющиеся с техническими трудностями, получают достаточно времени для твердого усвоения основных компьютерных и бескомпьютерных технологий математической деятельности.

Таким образом, у всех учащихся может быть сформирована математическая компетентность, в том числе уверенность в использовании математических средств при решении жизненных и профессиональных задач.

В соответствии с уже принятыми директивными решениями компьютер будет использоваться в ГИА, в том числе за 9-й класс.